Exercice 10 :

A) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $\begin{cases} f_n(x) = 2 - nx + \dfrac{1}{\operatorname{Log} x} & \text{pour } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f_n(0) = 2 \end{cases}$

1°/ Etudier la continuité de f_n à droite en $x_0 = 0$.

2°/ Etudier la dérivabilité de f_n à droite en $x_0 = 0$.

3°/ Etudier les variations de f_n. (distinguer $n = 0$ et $n \neq 0$).

4°/ Montrer que ($\mathbf{C}_n$) (courbe représentative de f_n) admet deux asymptotes (distinguer $n = 0$ et $n \neq 0$).

5°/ Construire ($\mathbf{C}_0$) et ($\mathbf{C}_1$) dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B) Soit φ_n la restriction de f_n à l'intervalle $]1,+\infty[$.

1°/ Montrer que φ_n est une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

2°/ Montrer que pour tout entier n non nul l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n.

3°/ Montrer que α_{n+1} est l'unique solution de l'équation $\varphi_n(x) = x$.

4°/a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.

b) Montrer que (α_n) est convergente vers un réel $l \geq 1$.

c) Calculer l.

Exercice 11 :

Soit $f(x) = -\ln|\cos x|$.

1°/ Etudier les variations de f et tracer $\mathbf{C}_f$.

2°/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,\dfrac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque.

b) Calculer $g^{-1}(\ln\sqrt{2})$.

c) Etudier la dérivabilité de g^{-1}.